• B' = R (O , $\frac{-\pi}{2}$) (B) donc $z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B + (1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}) z_O$ d'où

$z'_2 = iz_2$

2°/ Soit I = A'*B' donc $z_I = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \frac{i(z_1 - z_2)}{2}$

3°/ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_H - z_O = z_B - z_A \Leftrightarrow z_H = z_2 - z_1$

4°/ $aff(\overrightarrow{OI}) = z_I - z_O = \frac{i(z_1 - z_2)}{2}$

$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = z_2 - z_1$

Donc $\frac{aff(\overrightarrow{OI})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{-1}{2} i \in i\mathbb{R}$ donc (OI) $\perp$ (AB) d'où (OI) est une hauteur du triangle OAB.

D'autre part : $\frac{OI}{AB} = \frac{\left|\frac{i}{2}(z_1 - z_2)\right|}{|z_2 - z_1|} = \left|\frac{-i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ d'où OI = $\frac{1}{2}$ AB .

Solution 23 :

1°/ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{aff(\overrightarrow{AB})}{aff(\overrightarrow{AC})}$ est un nombre réel

$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{b-a}{-b-a} \in \mathbb{R}$.

2°/

a) Soit r : la rotation de centre A et qui transforme C en E alors

r = R (A , $\frac{\pi}{2}$) car $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

d'où : r : P $\rightarrow$ P

M(z) $\mapsto$ M'(z')

où $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) z_A$

Comme r (C) = E alors $z_E = i z_C + (1 - i) z_A$ or $z_A = a$ et $z_C = -b$

d'où e = -ib + (1 – i) a